

变容差遗传算法求解多约束问题的研究

尚万峰, 赵升吨, 申亚京, 史亮亮
(西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安)

摘要: 提出一种基于实数编码的变容差遗传算法, 该算法是将自适应遗传算法的随机性与可变容差算法的确定性相结合, 利用可变容差算法的准行域搜索准则, 对具有非线性、多峰、多约束的问题寻优。运用该混合算法对有边限制制的6个峰值、4个性能约束的复杂函数最大值多次寻优, 并与罚函数处理约束条件后的结果相比较, 表明该算法依据容差准则具有较高的可靠性, 尤其对于隐性约束, 在一定精度范围内能够提高收敛精度, 减少计算量, 提高优化效率。

关键词: 自适应遗传算法; 可变容差算法; 约束; 寻优

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)11-1267-04

Genetic Algorithm and Flexible Tolerance Algorithm Hybridized for Global Optimization Problems with Multiple Constraints

Shang Wanfeng, Zhao Shengdun, Shen Yajing, Shi Liangliang
(School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: A hybrid method combining a genetic algorithm with a flexible tolerance algorithm is proposed for global optimization problems with multiple nonlinear constraints and peaks. The adaptive genetic algorithm is used to localize the “best” areas, while the flexible tolerance algorithm exploits this area by search mechanism for quasi-feasible point. To evaluate the efficiency of this method, a complex function with six peaks and four constraints is implemented and compared with the results supplied by sequential unconstrained minimization technique (SUMT), which indicates that the hybrid method is able to improve convergence and reduce computing task greatly.

Keywords: adaptive genetic algorithm; flexible tolerance algorithm; multiconstraint; optimization

遗传算法模仿自然界生物进化的过程, 基于达尔文的生物进化论与 Mendel 的遗传学, 是适者生存和随机交换理论相结合的优化算法^[1], 前者消除了解中的不适应因素, 后者利用了原有解中的已有知识, 从而有利于加速搜索过程。在实际应用时, 遗传算法往往出现“早熟”现象、局部寻优能力差、收敛速度慢等缺点, Goldberg^[2] 引入分享 (Sharing) 思想, 通过子空间寻优来求得整个问题的解, 避免了算法只收敛到某个局部解。Potts 等^[3] 学者总结了 17 种交叉方法和 3 种变异方法, 避免进化过程中失去

一些有用的基因, 防止某些群体的值处于不变状态, 然而, 这些方法很难从根本上避免“早熟”收敛和收敛缓慢的现象。

对于非线性、非凸集合、多峰值、多约束优化问题, 基本遗传算法的求解效果往往不是解决全局约束优化问题的最有效的算法。与随机性遗传算法相比, 可变容差算法全局性差, 但在优化效率、局部搜索性能方面却占有绝对的优势。可变容差算法与其他确定性方法处理约束问题的不同方式是在搜索过程中既使用可行点, 也使用近乎可行点 (又称准可行

点)的不可行点来改善目标函数值,同时对约束的破坏估计量最小化,因此能够较快地找到近似最优解。

本文把可变容差算法(FTA)嵌入到随机性方法中,并与自适应遗传算法(AGA)相结合,取长补短,在不降低优化质量的前提下提高优化设计的效率,从而形成了数值优化中的变容差遗传算法(FT-AGA)。

1 可变容差算法

可变容差算法^[4]是一种数值寻优的方法,通过判断约束准则来运用确定性优化方法求解多约束最优化问题,把多个约束的优化问题变为一个单约束优化问题,在可行域和近似可行域中探索最优点,缩小近似可行域,直至收缩到可行点^[5]。由于非线性单纯形方法无需求解函数的导数,就可优化具有等式、不等式约束或二者兼有的问题,因此计算量相对较小。本文选用该确定性算法进行局部寻优,设目标函数为

$$f(X), X \in E^n \quad (1)$$

第 i 个等式约束条件和第 j 个不等式约束条件为

$$\left. \begin{aligned} h_i(X) &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ g_j(X) &\geq 0 \quad (j = m+1, \dots, p) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

通过可变容差算法将上述问题化为单约束问题,目标函数不变,约束条件为

$$\Phi^{(k)} - T(X) \geq 0 \quad (3)$$

$$T(X) = \left[\sum_{i=1}^m h_i^2(X) + \sum_{j=m+1}^p U_j g_j^2(X) \right]^{1/2} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{(k)} &= \min \left[\Phi^{(k-1)}, \frac{m+1}{r+1} \sum_{i=1}^{k+1} \|X_i^{(k)} - X_{r+2}^{(k)}\| \right] \\ \Phi^{(0)} &= 2(m+1)l \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: $T(X)$ 为约束破坏的估计量,是原问题所有约束条件的一个正泛函; $\Phi^{(k)}$ 为第 k 步容许误差准则的值,是一个下降序列,随 k 的增大将趋于 0,即 $\Phi^{(0)} \geq \Phi^{(1)} \geq \dots \geq \Phi^{(k)} \geq 0$; U_j 为 Heaviside 算子,当 $g_j(X) \geq 0$ 时, $U_j = 0$, 否则 $U_j = 1$; l 为初始多面体的边长值; m 为等式约束数目; n 为变量 X 的维数; $X_i^{(k)}$ 为 E^n 多面体中第 k 次搜索时的第 i 个顶点值; $X_{r+2}^{(k)}$ 为多面体(除 X_k 外)的形心顶点; r 为 $f(X)$ 的自由度, $r = n - m$ 。

可变容差算法优化的优点在于搜索过程中既使用可行点,也使用近乎可行点(又称准可行点)的不可行点,利用下降序列的 $\Phi^{(k)}$ 作为搜索约束的标准,只要寻优到小于给定精度即可。在迭代初期,约束条

件只需松散满足,只有到逼近最优解时才要求严格满足约束条件,以减少迭代时间。

2 变容差遗传算法

实现可变容差算法和遗传算法相结合主要有两种方案:①可变容差算法作为遗传算法的一个算子,在一定精度内提高算法的收敛速度;②在遗传算法优化的基础上,可变容差算法做第 2 次优化,优化后的结果作为最后的优化解。方案①使 2 种算法紧密结合,能够提高算法的优化效率,而方案②中,2 种算法结合较松散。本文采用方案①来实现变容差遗传算法,基本策略是先采用自适应遗传算法进行每代的全局性搜索,找到一组解,再根据这组解容差,来判断函数是否要通过可变容差算子的精细寻优。每代遗传算法都如此运算,直到满足局部域给定准则或全局搜索停止准则为止。

本文的自适应遗传算法采用轮盘赌选择方式,以及文献[1]中提到的自适应交叉和变异策略。具体的实现步骤如下。

(1)置初值。给定自适应遗传算法的初始群体数、个体基因的范围、最大遗传代数、选择率、变容差算法的最大迭代次数 $N_{\max}$ 和控制精度 ϵ 。

(2)编码及初始化。采用实数编码机制、蒙特卡罗方法随机产生均匀分布的初始群体,迭代次数为 0。

(3)计算适应度。适应度函数用式(1)和式(3)表示,然后做标度变换到合适范围。

(4)选择。采用轮盘赌选择方式^[1]。

(5)交叉。采用自调整交叉率 P_c 和多点非一致交叉。

确定本代交叉率 P_c ,交叉算子主要用来产生新个体,实现算法全局搜索,交叉概率应随进化过程逐渐变小,最后趋于某一稳定值,以免算法不能收敛或收敛过程加长。为此,每代交叉概率的表达为

$$P_c = \begin{cases} P_{cl} - \frac{(P_{cl} - P_{c2})(f' - f_{avg})}{f_{\max} - f_{avg}} & f' \geq f_{avg} \\ P_{cl} & f' < f_{avg} \end{cases}$$

式中: f' 为交叉的两个个体中较大的适应度值; f_{avg} 为当代种群的平均适应度值; $f_{\max}$ 为当代种群的最大适应度值。

(6)变异。采用自调整变异率 P_m 和多点非均匀变异算子,实现尽可能多点变异。确定本代变异 P_m ,变异算子主要用来维持群体多样性,防止出现未成熟收敛。变异概率应随进化过程逐渐变大,来维持群体的多样性。在同一代群体中,个体的变异概率应随

个体的优劣而变化. 为此, 取与个体适应度相关的自适应变异概率为

$$P_m = \begin{cases} P_{m1} - \frac{(P_{m1} - P_{m2})(f_{\max} - f)}{f_{\max} - f_{\text{avg}}} & f \geq f_{\text{avg}} \\ P_{m1} & f < f_{\text{avg}} \end{cases}$$

$$P_{m1} = 0.1; P_{m2} = 0.001$$

式中: f 为要变异个体的适应度值.

(7) 局部搜索. 在以上(3)~(6)步的全局搜索基础上, 取出本代中最优个体的基因, 即本代中最接近可行域的一组解, 如果这组解的容差 $\Phi_n^{(0)}$ (第 n 代的可变容差算法迭代初始的容差) 大于给定的 ϵ , 用可变容差法进行进一步的确定域搜索, 直到第 k 次迭代过程中 $\Phi_n^{(k)}$ 小于 ϵ 或 k 达到最大迭代次数.

在搜索过程中, 不仅可变容差算法迭代寻优中的 $\Phi_n^{(k)}$ ($k=0, \dots, N_{\max}$) 是递减趋势, 而且每代的初始容差 $\Phi_n^{(0)}$ 随着遗传代数的增加也是递减的. 利用下降序列的 $\Phi_n^{(k)}$ 作为搜索约束的标准, 寻找 $\Phi^{(k)} \geq T(X^{(k)}) \geq 0$ 的解, 极小化 $T(X^{(k)})$, 从而逐步逼近可行域 $T(X^{(k)})=0$. 如果 $T(X^{(k)}) > \Phi^{(k)}$, X 就是不可行解, 然后用确定性算法最小化 $T(X^{(k)})$. 如果 $\Phi^{(k)} \geq T(X^{(k)}) > 0$, X 就是近似可行域, 然后采用式(1); 如果 $T(X^{(k)})=0$, X 就是可行解, 然后继续采用式(1).

(8) 重新设定搜索空间. 在可变容差算子寻优完后, 缩小搜索范围重新设定下一次的搜索范围. 将种群中的所有个体相应的基因最小值作为该基因变量的下限, 所有个体相应的基因最大值作为该基因变量的上限.

(9) 取局部搜索后的最优个体, 作为本代最优个体. 设定 2 种停止准则(最大代数限制和最小容许误差限制), 只要满足任意一种就停止搜索, 否则重复执行(3)~(9)步.

3 实例验证

将变容差遗传算法应用于一类测试函数中, 并与结合了惩罚函数法(SUMT)的遗传算法进行比较, 验证变容差遗传算法的有效性, 并选取多约束、多峰值的复杂函数, 进行性能测试.

设适应度函数为 $F=f$, 群体规模为 40, 最大遗传代数为 200, 取实数进行编码. 为保证算法寻优的稳定性, 采用可变容差算法、罚函数算法与自适应遗传算法结合寻优, 将 2 种算法各进行 15 次计算, 并取自适应度值最高的 2 组数据进行对比与分析, 得

$$\max f_1 = 3(1-x_1)^2 e^{-x_1^2 - (x_2+1)^2} - \frac{1}{3} e^{-(x_1-1)^2 - x_2^2} -$$

$$10\left(\frac{x_1}{5} - x_1^3 - x_2^5\right) e^{-x_1^2 - x_2^2}$$

$$\text{s. t. } -3 \leq x_1, x_2 \leq 3$$

$$g_1 = x_2 + 0.8 + 1.8x_1 > 0$$

$$g_2 = 2x_2 + 1 + e^{x_1} \geq 0$$

$$g_3 = 10x_1 - 3 + 2e^{x_2} \geq 0$$

$$g_4 = x_1^2 + 4 - 2x_2 > 0$$

从图 1 可以看出, f 函数在边界约束范围内有 3 个极大值和 3 个极小值. 用变容差遗传算法寻求带约束的函数值, 群体初始化时, 采用蒙特卡罗方法随机生成边界范围内均匀分布的点, $\Phi_1^{(k)}=1.2005$, 如图 2 所示, 应尽可能地避免运算陷入局部收敛.

在图 3 中, f 函数经第 3 代遗传后, 还有部分点位于不可行域, 此时 $\Phi_3^{(k)}=0.3968$, 边界范围缩小为 $x_1 \in [-0.78438, 1.4774]$, $x_2 \in [-0.59412, 2.4754]$. 经过 2 代, 到第 5 代时 $\Phi_5^{(k)}=0.0324$, $x_1 \in [-0.34089, 0.1449]$, $x_2 \in [1.4232, 1.9146]$, 所有的 40 个群体都已经进化到可行域, 如图 3b 所示. 随着遗传代数的增加, 变量群体的边界逐渐缩小, f 函数经过 7 代遗传收敛于一点, 即 f 函数的最大值 $f(X^*)=8.1062$, 此时 $X^* = (-0.0093, 1.5814)$.

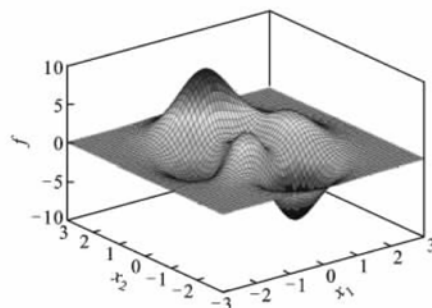


图 1 f 函数的三维空间图

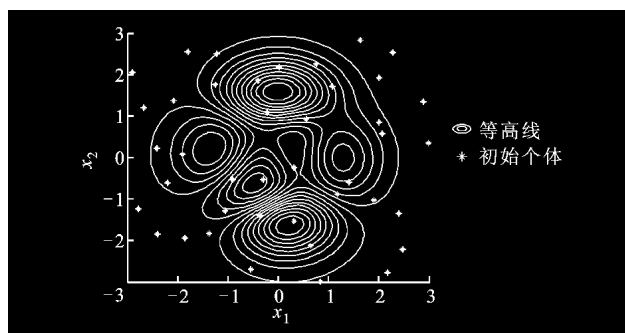
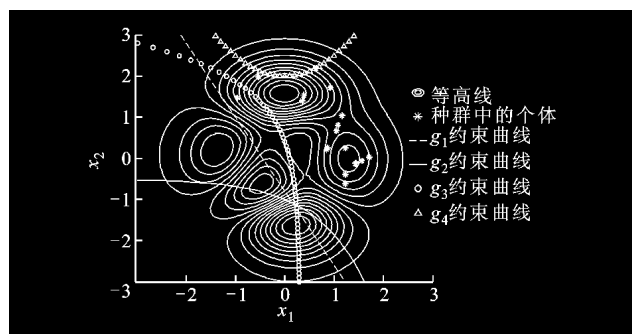
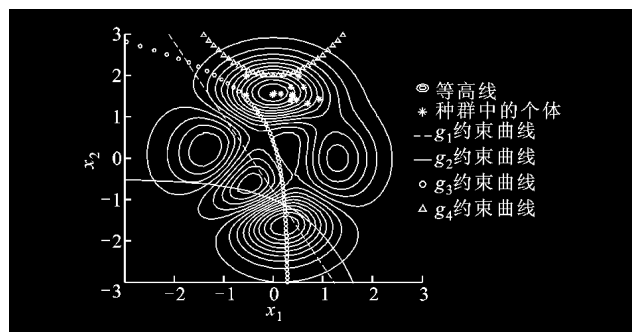


图 2 初始点和 f 函数等高线的分布

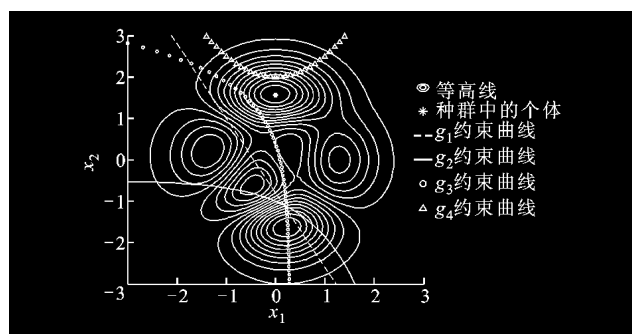
从图 3 中看出, 变容差遗传算法在搜索过程中, 并未产生局部收敛, 每代初始容差值 $\Phi_n^{(0)}$ (n 为遗传代数) 成递减序列, 且可变容差算法搜索最优值时每步迭代容差 $\Phi_n^{(k)}$ 也是逐步减小的. 由于寻优过程中



(a) 第3代



(b) 第5代



(c) 第7代

图3 遗传算法中的3代关键种群分布

根据容差准则来最小化约束估计量,可使群体中的最优个体很快地搜索到近似可行域或可行域,因此避免了部分性能差的个体目标函数适应度的运算,减少了计算量。

在15次寻优过程中,AGA相和FTA相融合的方法可以100%找到最优解,而AGA和SUMT相融合的方法则有2次不能收敛,寻优成功率只有86.667%。如图4所示,各取两种融合算法中最好的一组进行比较,AGA和SUMT相结合的算法经过14代收敛,而AGA和FTA相结合的算法经过8代遗传后即收敛。因此,SUMT融入遗传算法就是将约束和适应度函数合并计算构成罚函数,作为个体的新适应度和寻优函数。这种方法是直接对适应度寻优,并不能保证大部分的个体每代都能满足约束条件,但还要计算这些个体每代的适应度值。因此,只有增加计算量,才能改善群体的适应度,降低收敛速度,避免局部收敛。在遗传算法中,运用变容差遗传算法可保证 $\Phi_n^{(k)}$ 递减,每代遗传中取 $T(X) \cdot$

$(T(X^{(k)}) \leq \Phi_n^{(k)})$ 的最小值作为本代最优个体,可以尽量减少每代不符合约束条件的个体存在,不仅收敛速度快,而且提高了可靠性。

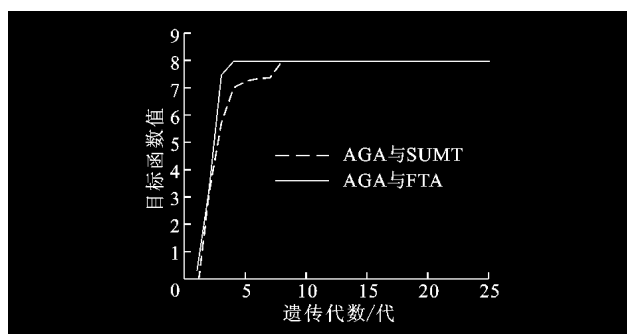


图4 两种方法性能比较

当适应度函数中存在反正余弦、开方、除法等运算时,还要考虑隐性约束条件。罚函数是由目标函数和约束条件表示的,在不满足隐性约束时,罚函数是非法的,只有强制性转化为低适应度的罚函数,才能被优良个体淘汰,重新搜索。因此,对于多基因的群体,这种搜索可行解的难度并不亚于寻求最优解的难度。

4 结 论

本文提出的变容差遗传算法,依据容差准则将实数编码的自适应遗传算法和可变容差算法相结合,经过验证和测试,表明该方法能够有效地解决非线性的、多约束的问题。与常规的在遗传算法中运用罚函数的方法相比较,本文的算法从性能上有很大的优越性,在全局最优概率和收敛速度上也有较大的提高。

参考文献:

- [1] 王小平,曹立明. 遗传算法——理论、应用与软件实现[M]. 西安:西安交通大学出版社,2002:73-74.
- [2] Goldberg D. Genetic algorithms in search, optimization and machine learning [M]. Reading MA: Addison-Wesley, 1989:251-280.
- [3] Potts T C, Terri D G, Surya B Y. The development and evolution of an improved genetic algorithm based on migration and artificial selection [J]. IEEE Trans on System, Man and Cybernetics, 1994, 24(1):73-85.
- [4] Jin J. Simulation-based retrospective optimization of stochastic systems[D]. West Lafayette, USA: School of Industrial Engineering, Purdue University, 1998.
- [5] 田福祥. 机械优化设计理论与应用[M]. 北京:冶金工业出版社,1998:59-64.

(编辑 管咏梅)